Chapitre 3 : les suites

Troisième partie : les suites adjacentes

1 Les suites adjacentes

Définition :
Dire que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes**, signifie que :
- l'une est croissante ;
- l'autre est décroissante ;
- la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Exercice :

1. On définit (u_n) et (v_n), pour $n \geqslant 1$, par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$
Montrer que ces suites sont adjacentes.

2. Montrer que les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 - \frac{1}{n} \qquad\qquad v_n = 1 + \frac{2}{n}$$

sont adjacentes.

Théorème :
Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, (u_n) étant la suite croissante et (v_n) étant la suite décroissante, alors :
• pour tout n, $u_n \leqslant v_n$;
• les deux suites (u_n) et (v_n) convergent, et elles ont même limite ℓ ;
• pour tout n, $u_n \leqslant \mathrm{L} \leqslant v_n$.

Démonstration :

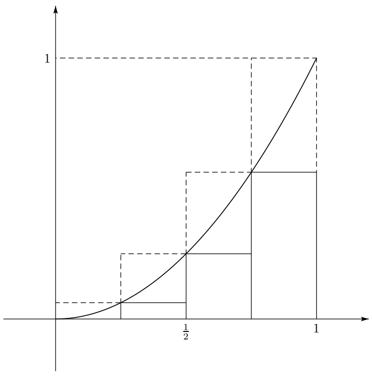
2 Activité : encadrement d'une aire par la méthode des rectangles

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x^2$. On note $\mathscr{D}$ le domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$.
Le but est de déterminer l'aire $\mathscr{A}$ de $\mathscr{D}$.

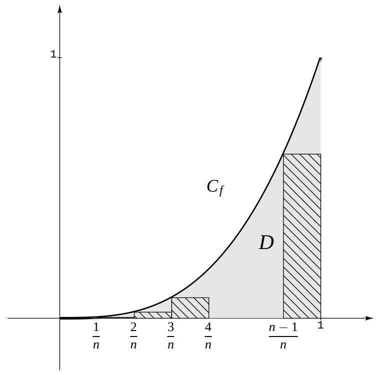
Par une considération géométrique élémentaire, montrer que $\mathscr{A} \leqslant \frac{1}{2}$.

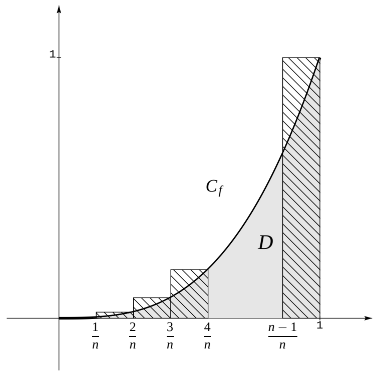
2.1 Encadrement de l'aire $\mathscr{A}$

On subdivise l'intervalle $[0;1]$ en n intervalles ($n \geqslant 2$) de même amplitude $\frac{1}{n}$, n étant un entier naturel non nul.



Cas où $n = 4$





On note s_n la somme des aires des rectangles situés sous la courbe de $\mathscr{C}$ et S_n la somme des aires des rectangles situés au-dessus de la courbe de $\mathscr{C}$. Ainsi, on a pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$s_n \leqslant \mathscr{A} \leqslant S_n.$$

1. a. Calculer s_n et S_n pour $n = 4$.

b. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$s_n = \frac{1}{n^3}\left(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\right).$$

c. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right).$$

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. En déduire que

$$s_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

puis que

$$S_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

4. a. Démontrer que les suites (s_n) et (S_n) sont adjacentes, puis déterminer leur limite commune.

b. Déduire de tout ce qui précède la valeur, en unités d'aire, de l'aire $\mathscr{A}$.